

## 多时滞 Lurie 网络控制系统动态输出反馈控制器设计

陈刚<sup>1,2</sup>, 朱红求<sup>1</sup>, 阳春华<sup>1</sup>, 胡春华<sup>3</sup>

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083; 2. 湖南工业大学 电气与信息工程学院, 湖南 株洲 412008;  
3. 湖南商学院 计算机与信息学院, 湖南 长沙 410205)

**摘要:** 针对一类具有非理想网络状况, 如时变网络时滞、分组丢失和乱序等问题的基于动态输出反馈控制器的网络控制系统, 建立了多时滞 Lurie 网络控制系统模型, 应用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法, 保留 Lyapunov-Krasovskii 泛函导数中经常被忽略的有用项, 提出了一种具有更低保守性的多时滞 Lurie 网络控制系统时滞相关稳定条件。并通过增加一等等式约束将非线性矩阵不等式转化为线性矩阵不等式表示的可解性问题, 给出了一种动态输出反馈控制器的设计方法。数值实例表明该设计方法具有更低的保守性。

**关键词:** Lurie 系统; 网络控制系统; 动态输出反馈; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP310.9

文献标识码: B

文章编号: 1000-436X(2012)12-0116-07

## Design of dynamic output feedback controller for lurie networked control systems with multiple delays

CHEN Gang<sup>1,2</sup>, ZHU Hong-qiu<sup>1</sup>, YANG Chun-hua<sup>1</sup>, HU Chun-hua<sup>3</sup>

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China;

2. School of Electrical and Information Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412008, China;

3. School of Computer and Information Engineering, Hunan University of Commerce, Changsha 410205, China)

**Abstract:** For a class of network control system based on dynamic output feedback controller with non-ideal network conditions, such as time-varying network-induced delay, data packet loss and out-of-order problems. The Lurie networked control system was modeled as a multiple delay Lurie system. By employing a Lyapunov-Krasovskii functional, some useful terms have been retained, which were used to be discarded in the derivative of Lyapunov-Krasovskii functional, an improved delay-dependent stability conditions for Lurie NCS was proposed. Furthermore, by adding an equation constraint, it was transformed into a solvability problem described by linear matrix inequality; the resulting condition was extended to design a dynamic output feedback control. Numerical examples are provided to show the results are less conservative.

**Key words:** Lurie system; networked control systems; dynamic output feedback; liner matrix inequality

收稿日期: 2012-04-29; 修回日期: 2012-10-15

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目 (61025015); 国家自然科学基金资助项目 (61143004, 61203136, 61074067, 61273185); 湖南省自然科学基金资助项目 (11JJ2033, 12JJ4062); 湖南省教育厅基金资助项目 (12C0078); 湖南工业大学自然科学基金资助项目 (2012HZX07)

**Foundation Items:** The National Science Fund of China for Distinguished Young Scholars (61025015); The National Natural Science Foundation of China (61143004, 61203136, 61074067, 61273185); The Natural Science Foundation of Hunan Province (11JJ2033, 12JJ4062); Hunan Provincial Department of Education (12C0078); The Natural Science Project of Hunan University of Technology (2012HZX07)

## 1 引言

随着计算机技术和网络通信技术的不断发展,工业控制系统发生了很大的技术变革,网络控制系统(NCS, networked control systems)诞生, NCS 是一种通过实时通信网络形成的闭环反馈控制系统, NCS 由在空间上分布式的被控对象、控制器、传感器、驱动器以及一个带宽有限的实时网络连接。相对于传统意义上点对点结构的计算机控制系统,网络控制系统具有成本更低、功耗更小、安装更简便、可实现资源共享、远程操作等优点。在 NCS 中,被控对象、控制器、传感器等之间的数据传输通过共享的、不确定性的实时通信网络进行,必然会出现大小不一、时变和随机的网络诱导时滞和数据分组丢失、乱序的问题。由于数据在实时通信网络传输过程中不确定性的限制以及控制系统的性能要求,控制任务及采样的数据传递必须在一定的时间范围内完成,如果数据传输产生较大的时滞,将导致系统控制性能的降低,严重时将会导致控制系统的不稳定<sup>[1-10]</sup>。因此,设计有效的控制器来保证网络控制系统在具有网络诱导时滞、数据分组丢失和乱序等非理想网络状况下的稳定性具有重要的意义。

近年来, NCS 的研究是近年来国际控制领域研究的热点主题之一,文献[11]采用连续时间系统对象的约当式,对具有有界时变时滞的离散时间 NCS 模型进行重新建模,并给出了稳定性分析和控制器设计。文献[12]在 Lyapunov-Krasovskii 泛函中增加了系统状态导数和时滞状态的信息,构造了一种增广 Lyapunov-Krasovskii 泛函,并基于这种增广 Lyapunov-Krasovskii 泛函结合自由权矩阵方法对一类中立型时滞系统进行研究,获得了具有较低保守性的时滞相关稳定条件。文献[13]针对控制对象为时变时滞的 Lurie 非线性系统,考虑网络时滞是时变和有界的情形,提出了一种改进的网络控制系统绝对稳定判据,并基于锥补迭代算法设计了一种状态反馈控制器。在文献[14]中,考虑在时滞、分组丢失、乱序的情况下,以 Lurie 系统作为被控对象,采用具有动态补偿功能的动态输出反馈控制器,同时考虑了控制器到执行器和传感器到控制器的时滞,把系统建模为多时滞的非线性 Lurie 系统,采用自由权矩阵方法得到时滞相关的稳定条件,并给出了控制器参数的设计方法,但是构

造 Lyapunov-Krasovskii 泛函经过微分运算后,丢弃了  $-\int_{t-t_{1m}}^{t-t_{1c}} \dot{\mathbf{x}}^T(a)R_1\dot{\mathbf{x}}(a)da$  和  $-\int_{t-t_{2m}}^{t-t_{2c}} \dot{\mathbf{x}}^T(a)R_1\dot{\mathbf{x}}(a)da$  这两项。文献[15]在构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函时,包含项  $\int_{t-h}^t \int_s^t \dot{\mathbf{x}}^T(v)T\dot{\mathbf{x}}(v)dvd s$ , 经过微分运算后,该项分解为  $h \dot{\mathbf{x}}^T(v)T\dot{\mathbf{x}}(v)$  与  $-\int_{t-h}^t \dot{\mathbf{x}}^T(v)T\dot{\mathbf{x}}(v)dv$  两项,但在一些约束条件下,  $-\int_{t-h}^t \dot{\mathbf{x}}^T(v)T\dot{\mathbf{x}}(v)dv$  被直接放大为  $-\int_{t-h}^t \dot{\mathbf{x}}^T(v)T\dot{\mathbf{x}}(v)dv$ , 那么有一项  $-\int_{t-h}^{t-h} \dot{\mathbf{x}}^T(v)T\dot{\mathbf{x}}(v)dv$  被丢弃,文献[14]和文献[15]这样的处理方法不可避免地带来保守性的结果。

基于以上研究的启发,本文在已有网络控制系统模型<sup>[2-9]</sup>的基础上,以 Lurie 系统作为被控对象,将基于动态反馈控制器的 Lurie 网络控制系统建模为一个多时滞的 Lurie 系统,构造一种 Lyapunov-Krasovskii 泛函,计算其导数时不丢弃任何重要的有效信息,并引入自由权矩阵方法,得到了一种具有更低保守性的多时滞 Lurie 网络控制系统时滞相关稳定条件,并给出了一种动态输出反馈控制器的设计方法。数值实例表明该方法具有更低的保守性。

全文引用下列标记:  $R^{n \times m}$ ,  $R^n$  分别表示实数域上的  $n \times m$  矩阵空间与  $n$  维向量空间; 矩阵  $Q = Q^T \geq 0$  或  $Q = Q^T > 0$  表示矩阵  $Q$  是一个半正定或正定对称矩阵;  $I$  表示适当维数的单位矩阵;  $A^{-1}$  和  $A^T$  分别表示矩阵  $A$  的逆和转置; \* 表示矩阵中的对称项,即  $\begin{bmatrix} X & H \\ * & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & H \\ H^T & Y \end{bmatrix}$ , 其中,  $X$  和  $Y$  为对称矩阵。

## 2 问题描述

考虑网络控制系统中被控对象为如下 Lurie 系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{d}}(t) = A c(t) + B u(t) + D f(t) \\ z(t) = C c(t) \\ f(t) = -f(t, z(t)) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $c(t) \in R^n$  状态向量,  $u(t) \in R^m$  为控制输入向量,  $z(t) \in R^q$  为输出,  $A, B, C, D$  为具有适当维数的常数矩阵,  $f(t, z(t))$  为对  $t$  分段连续的非线性函数,  $z(t)$  满足 Lipchitz 条件  $f(t, 0) = 0$  并且对  $\forall t \geq 0$ ,  $\forall z(t) \in R^q$  满足扇形约束

$$f^T(t, z(t))[f(t, z(t)) - Qz(t)] = 0 \quad (2)$$

其中,  $Q$  为实对称矩阵,  $f(\cdot) \in F[0, Q]$ 。

为了便于描述系统, 做如下假设: 传感器时间驱动, 控制器和执行器事件驱动, 以  $h$  为采样周期。数据分组单包传输, 并且带有时间序号。控制器到执行器的时滞为  $t_{ca}$ , 传感器到控制器的时滞为  $t_{sc}$ , 且  $0 < t_{sc} < t_{lm} < \infty$ ,  $0 < t_{ca} < t_{2m} < \infty$ , 如图 1 所示。

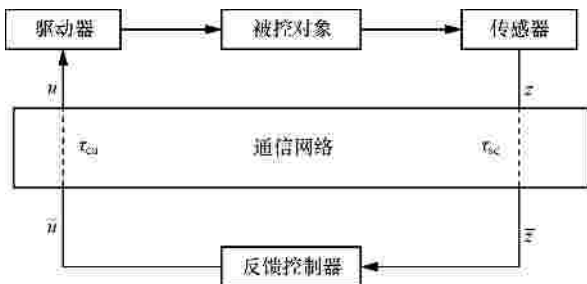


图 1 基于动态反馈控制器的 Lurie 网络控制系统

注 1 如果数据在网络传输过程中出现了分组丢失和乱序问题, 控制系统可以根据数据分组的时间序号对接收到的数据进行取舍, 控制器总是选用最新到达的控制信息数据分组, 忽略滞后和乱序的数据分组, 当滞后的数据分组到达时, 控制器认为它是一个丢失的数据分组, 从而保证控制系统采用最新的数据进行控制。因此,  $t_{ca}$  和  $t_{sc}$  不仅包括数据传输、等待和计算时滞, 还包括分组丢失和乱序产生的时滞。

采用具有动态补偿功能的动态输出反馈控制器可描述为

$$\begin{cases} \dot{d}_f(t) = A_f c_f(t) + B_f \bar{z}(t) \\ \bar{u}(t) = C_f c_f(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $c_f(t) \in R^p$  ( $p = n$ ) 是控制器的状态,  $A_f, B_f, C_f$  为适当维数的常数矩阵。

由于  $\bar{z}$  为传感器的输出信号  $z$  在控制器端的输入,  $u$  为控制量  $\bar{u}$  在执行器端的输入, 因此, 式(1)和式(3)可改写成

$$\begin{cases} \dot{d}(t) = A c(t) + B \bar{u}(t - t_{ca}) + D f(t) \\ z(t) = C c(t) \\ f(t) = -f(t, z(t)) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{d}_f(t) = A_f c_f(t) + B_f z(t - t_{sc}) \\ \bar{u}(t) = C_f c_f(t) \end{cases} \quad (5)$$

定义  $x(t) = [c^T(t) \quad c_f^T(t)]^T$ , 则由式(4)和式(5)

可得:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + B_1 x(t - t_{ca}) + B_2 x(t - t_{sc}) + \bar{D}f(t) \\ x(t) = w(t), \quad t \in [t_0 - t_m, t_0] \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $w(t)$  为系统初始函数, 该函数是连续和可微的, 并且

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_f \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & B C_f \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_f C & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}$$

为了方便处理, 引出如下引理。

引理 1<sup>[16]</sup> 假设  $A$  和  $B$  均为满秩矩阵, 那么存在正定的对称矩阵  $P$ , 使得  $PA = B$  成立, 当且仅当  $A^T B = B^T A > 0$  时,  $P = B(A^T B)^{-1} B^T + A_{\perp} L A_{\perp}^T$  为满足等式的所有可能的解, 其中,  $L$  为适当维数的任意正定矩阵, 矩阵  $A_{\perp}$  满足  $A_{\perp}^T A = 0$ ,  $A_{\perp}^T A_{\perp} = I$ , 矩阵  $[A \quad A_{\perp}]$  可逆。

### 3 主要结果

定理 1 给定标量  $t_{1m} > 0, t_{2m} > 0$ , 若存在合适维数的正定对称矩阵  $P$  和  $R_i, Q_i$  ( $i = 1, 2$ ), 任意合适维数的矩阵  $G_i, H_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ * & X_{22} \end{bmatrix} > 0$ ,

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ * & Y_{22} \end{bmatrix} > 0 \text{ 使得}$$

$j =$

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & P\bar{D} - Q^T & -H_3 & -G_3 & \bar{A}^T R_1 & \bar{A}^T R_2 \\ * & s_{22} & 0 & 0 & -H_4 & 0 & B_1^T R_1 & B_1^T R_2 \\ * & * & s_{33} & 0 & 0 & -G_4 & B_2^T R_1 & B_2^T R_2 \\ * & * & * & -2I & 0 & 0 & \bar{D}^T R_1 & \bar{D}^T R_2 \\ * & * & * & * & -Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -Q_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -t_{1m}^{-1} R_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -t_{2m}^{-1} R_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & H_1 \\ * & X_{22} & H_2 \\ * & * & R_1 \end{bmatrix} > 0 \quad (8)$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & H_3 \\ * & X_{22} & H_4 \\ * & * & R_1 \end{bmatrix} > 0 \quad (9)$$

$$y_3 = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & G_1 \\ * & Y_{22} & G_2 \\ * & * & R_2 \end{bmatrix} 0 \quad (10)$$

$$y_4 = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & G_3 \\ * & Y_{22} & G_4 \\ * & * & R_2 \end{bmatrix} 0 \quad (11)$$

成立,则系统(6)对于所有的  $f(\cdot) \in [0, Q]$  是全局渐近稳定的, 其中,

$$s_{11} = P\bar{A} + \bar{A}^T P + G_1 + G_1^T + H_1 + H_1^T + Q_1 + Q_2 + t_{1m} X_{11} + t_{2m} Y_{11}$$

$$s_{12} = PB_2 - H_1 + H_2^T + H_3 + t_{1m} X_{12}$$

$$s_{13} = PB_1 - G_1 + G_2^T + G_3 + t_{2m} Y_{12}$$

$$s_{22} = -H_2 - H_2^T + H_4 + H_4^T + t_{1m} X_{22}$$

$$s_{33} = -G_2 - G_2^T + G_4 + G_4^T + t_{2m} Y_{22}$$

证明 构建如下形式的 Lyapunov-Krasovskii 泛函数

$$V(t, x(t)) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-t_{1m}}^t x^T(s)Q_1x(s)ds + \int_{t-t_{2m}}^t x^T(s)Q_2x(s)ds + \int_{t-t_{1m}}^0 \int_{t+q}^t \mathfrak{k}^T(s)R_1\mathfrak{k}(s)dsdq + \int_{t-t_{2m}}^0 \int_{t+q}^t \mathfrak{k}^T(s)R_2\mathfrak{k}(s)dsdq \quad (12)$$

由牛顿—莱布尼茨公式和系统(6)可得,对于任意合适维数的矩阵  $G_i, H_i (i=1, 2, 3, 4)$  下式成立。

$$2[x^T(t)G_1 + x^T(t-t_{ca})G_2] \times [x(t) - x(t-t_{ca}) - \int_{t-t_{ca}}^t \mathfrak{k}(s)ds] = 0 \quad (13)$$

$$2[x^T(t)G_3 + x^T(t-t_{ca})G_4] \times [x(t-t_{ca}) - x(t-t_{2m}) - \int_{t-t_{2m}}^{t-t_{ca}} \mathfrak{k}(s)ds] = 0 \quad (14)$$

$$2[x^T(t)H_1 + x^T(t-t_{sc})H_2] \times [x(t) - x(t-t_{sc}) - \int_{t-t_{sc}}^t \mathfrak{k}(s)ds] = 0 \quad (15)$$

$$2[x^T(t)H_3 + x^T(t-t_{sc})H_4] \times [x(t-t_{sc}) - x(t-t_{1m}) - \int_{t-t_{1m}}^{t-t_{sc}} \mathfrak{k}(s)ds] = 0 \quad (16)$$

同时,对适合维数的矩阵  $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ * & X_{22} \end{bmatrix} 0$ ,

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ * & Y_{22} \end{bmatrix} 0, \text{ 有}$$

$$t_{1m}x_1^T(t)Xx_1(t) - \int_{t-t_{1m}}^t x_1^T(s)Xx_1(s)ds = 0 \quad (17)$$

$$t_{2m}x_2^T(t)Yx_2(t) - \int_{t-t_{2m}}^t x_2^T(s)Yx_2(s)ds = 0 \quad (18)$$

因此

$$t_{1m}x_1^T(t)Xx_1(t) - \int_{t-t_{sc}}^t x_1^T(s)Xx_1(s)ds - \int_{t-t_{1m}}^{t-t_{sc}} x_1^T(s)Xx_1(s)ds = 0 \quad (19)$$

$$t_{2m}x_2^T(t)Yx_2(t) - \int_{t-t_{ca}}^t x_2^T(s)Yx_2(s)ds - \int_{t-t_{2m}}^{t-t_{ca}} x_2^T(s)Yx_2(s)ds = 0 \quad (20)$$

其中,  $z_1(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-t_{sc})]^T$ ,  $z_2(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-t_{ca})]^T$  根据系统(1)和式(2)有

$$-2f^T(t)f(t) - 2f^T(t)Qx(t) = 0 \quad (21)$$

计算  $V(t, x(t))$  沿系统(6)的导数有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x(t)) &= 2x^T(t)P\mathfrak{k}(t) + x^T(t)Q_1x(t) - x^T(t-t_{1m})Q_1x(t-t_{1m}) \\ &+ x^T(t)Q_2x(t) - x^T(t-t_{2m})Q_2x(t-t_{2m}) \\ &+ t_{1m}\mathfrak{k}^T(t)R_1\mathfrak{k}(t) - \int_{t-t_{1m}}^t \mathfrak{k}^T(s)R_1\mathfrak{k}(s)ds + \\ &t_{2m}\mathfrak{k}^T(t)R_2\mathfrak{k}(t) - \int_{t-t_{2m}}^t \mathfrak{k}^T(s)R_2\mathfrak{k}(s)ds \\ &= 2x^T(t)P\mathfrak{k}(t) + x^T(t)Q_1x(t) - x^T(t-t_{1m})Q_1x(t-t_{1m}) \\ &+ x^T(t)Q_2x(t) - x^T(t-t_{2m})Q_2x(t-t_{2m}) \\ &+ t_{1m}\mathfrak{k}^T(t)R_1\mathfrak{k}(t) + t_{2m}\mathfrak{k}^T(t)R_2\mathfrak{k}(t) \\ &- \int_{t-t_{sc}}^t \mathfrak{k}^T(s)R_1\mathfrak{k}(s)ds - \int_{t-t_{1m}}^{t-t_{sc}} \mathfrak{k}^T(s)R_1\mathfrak{k}(s)ds \\ &- \int_{t-t_{ca}}^t \mathfrak{k}^T(s)R_2\mathfrak{k}(s)ds - \int_{t-t_{2m}}^{t-t_{ca}} \mathfrak{k}^T(s)R_2\mathfrak{k}(s)ds \quad (22) \end{aligned}$$

将式(13)~式(16)和式(19)~式(21)代入式(22)的右边,可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x(t)) &= z^T(t)\bar{J}z(t) - \int_{t-t_{sc}}^t z_1^T(t, s)y_1z_1(t, s)ds \\ &- \int_{t-t_{1m}}^{t-t_{sc}} z_1^T(t, s)y_2z_1(t, s)ds - \int_{t-t_{ca}}^t z_2^T(t, s)y_3z_2(t, s)ds \\ &- \int_{t-t_{2m}}^{t-t_{ca}} z_2^T(t, s)y_4z_1(t, s)ds \quad (23) \end{aligned}$$

其中,

$$J^- = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & P\bar{D} - Q^T & -H_3 & -G_3 \\ * & s_{22} & 0 & 0 & -H_4 & 0 \\ * & * & s_{33} & 0 & 0 & -G_4 \\ * & * & * & -2I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Q_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -Q_2 \end{bmatrix} +$$

$$t_{1m}i R_{1j}^T + t_{2m}i R_{2j}^T$$

$$z(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-t_{sc}) \quad x^T(t-t_{ca})$$

$$f^T(t) \quad x^T(t-t_{1m}) \quad x^T(t-t_{2m})]^T$$

$$i^T = [\bar{A} \quad B_1 \quad B_2 \quad \bar{D}]$$

$$z_1(t,s) = [x_1^T(t) \quad \mathbf{k}^T(s)]^T$$

$$z_2(t,s) = [x_2^T(t) \quad \mathbf{k}^T(s)]^T$$

若  $j < 0$  , 根据 Schur 补引理<sup>[17]</sup> , 可知  $J^- < 0$  , 且  $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0$  则对于充分小的  $e$  , 有  $\dot{V}(t,x(t)) = -e \|x(t)\|^2$  , 这样 , 系统(6)在扇形区域  $[0,Q]$  内全局渐近稳定。

注 2 在定理 1 的证明过程中 , 由于没有丢弃  $-\int_{t-t_{1m}}^{t-t_{ca}} \mathbf{k}^T(a)R_{1j}\mathbf{k}(a)da$  和  $-\int_{t-t_{2m}}^{t-t_{sc}} \mathbf{k}^T(a)R_{2j}\mathbf{k}(a)da$  这两项 , 而文献[13]等没有考虑这两项 , 因此本文这种处理方法可大大降低保守性。

定理 1 没有考虑动态反馈控制器的设计问题 , 当考虑反馈控制器设计问题时 , 有如下定理。

定理 2 给定标量  $t_{1m} > 0, t_{2m} > 0$  , 若存在合适维数的正定对称矩阵  $L$  ,  $\bar{R}_i, \bar{Q}_i (i=1,2)$  和  $V_1, V_2, V_3$  , 任意合适维数的矩阵  $\bar{A}_f, \bar{B}_f, \bar{C}_f, \bar{G}_i, \bar{H}_i (i=1,2,3,4)$  ,

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_{11} & \bar{X}_{12} \\ * & \bar{X}_{22} \end{bmatrix} < 0, \bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ * & \bar{Y}_{22} \end{bmatrix} < 0$$
 使得

$J^- =$

$$\begin{bmatrix} \bar{s}_{11} & \bar{s}_{12} & \bar{s}_{13} & \bar{D} - L\Theta^T & -\bar{H}_3 & -\bar{G}_3 & L\bar{A}^T & L\bar{A}^T \\ * & \bar{s}_{22} & 0 & 0 & -\bar{H}_4 & 0 & LB_1^T & LB_1^T \\ * & * & \bar{s}_{33} & 0 & 0 & -\bar{G}_4 & LB_2^T & LB_2^T \\ * & * & * & -2I & 0 & 0 & \bar{D}^T & \bar{D}^T \\ * & * & * & * & -\bar{Q}_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{Q}_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -t_{1m}^{-1}L\bar{R}_1^{-1}L & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -t_{2m}^{-1}L\bar{R}_2^{-1}L \end{bmatrix} < 0$$

(24)

$$y_1^- = \begin{bmatrix} \bar{X}_{11} & \bar{X}_{12} & \bar{H}_1 \\ * & \bar{X}_{22} & \bar{H}_2 \\ * & * & \bar{R}_1 \end{bmatrix} < 0$$

(25)

$$y_2^- = \begin{bmatrix} \bar{X}_{11} & \bar{X}_{12} & \bar{H}_3 \\ * & \bar{X}_{22} & \bar{H}_4 \\ * & * & \bar{R}_1 \end{bmatrix} < 0$$

(26)

$$y_3^- = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} & \bar{G}_1 \\ * & \bar{Y}_{22} & \bar{G}_2 \\ * & * & \bar{R}_2 \end{bmatrix} < 0$$

(27)

$$y_4^- = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} & \bar{G}_3 \\ * & \bar{Y}_{22} & \bar{G}_4 \\ * & * & \bar{R}_2 \end{bmatrix} < 0$$

(28)

式中

$$s_{11} = \bar{A}L + L\bar{A}^T + \bar{G}_1 + \bar{G}_1^T + \bar{H}_1 + \bar{H}_1^T +$$

$$\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + t_{1m}\bar{X}_{11} + t_{2m}\bar{Y}_{11}$$

$$s_{12} = B_2L - \bar{H}_1 + \bar{H}_2^T + \bar{H}_3 + t_{1m}\bar{X}_{12}$$

$$s_{13} = B_1L - \bar{G}_1 + \bar{G}_2^T + \bar{G}_3 + t_{2m}\bar{Y}_{12}$$

$$s_{22} = -\bar{H}_2 - \bar{H}_2^T + \bar{H}_4 + \bar{H}_4^T + t_{1m}\bar{X}_{22}$$

$$s_{33} = -\bar{G}_2 - \bar{G}_2^T + \bar{G}_4 + \bar{G}_4^T + t_{2m}\bar{Y}_{22}$$

并且

$$\begin{cases} L\bar{A}^T = L\bar{A} + \mathcal{C}_\perp N\bar{A}_f^T H_1^T \\ LB_1^T = \mathcal{C}_\perp N\bar{C}_f^T \bar{B}^T \\ LB_2^T = \mathcal{C}_\perp \bar{B}_f^T H_1^T \end{cases}$$

(29)

式中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C^T \\ 0 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} C \\ I_n \end{bmatrix}$$

$$L = \mathcal{C}V_1\mathcal{C}^T + \mathcal{C}_\perp \begin{bmatrix} I_{n-q} \\ 0 \end{bmatrix} V_2 \begin{bmatrix} I_{n-q} \\ 0 \end{bmatrix}^T \mathcal{C}_\perp^T + \mathcal{C}_\perp \begin{bmatrix} C \\ I_n \end{bmatrix} V_3 \begin{bmatrix} C \\ I_n \end{bmatrix}^T \mathcal{C}_\perp^T$$

成立 , 则系统(6)对于所有的  $f(\cdot) \in [0,Q]$  是全局渐近稳定的 , 其动态输出反馈控制器的参数由式(30)求得。

$$\begin{aligned} A_f &= \bar{A}_f V_3^{-1}, B_f = \bar{B}_f (\bar{B}^T)^{-1}, \\ C_f &= \bar{C}_f V_3^{-1}, \bar{D} = V_1 (\mathcal{C}^T \mathcal{C}) \end{aligned}$$

(30)

证明 用  $\text{diag}\{L, L, L, I, L, L, R_1^{-1}, R_2^{-1}\}$  分别左乘和右乘式(7) , 而对于式(8)~式(11) , 左乘和右乘  $\text{diag}\{L, L, L\}$  , 令  $L = P^{-1}$  ,  $W_1 = P^{-1}Q_1P^{-1}$  ,  $W_2 = P^{-1}Q_2P^{-1}$  ,  $\bar{G}_i = P^{-1}G_iP^{-1}$  ,  $\bar{H}_i = P^{-1}H_iP^{-1} (i=1, 2,3,4)$  ,  $\bar{X} = \text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}\} \cdot X \cdot \text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}\}$  ,

$\bar{Y} = \text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}\} \cdot Y \cdot \text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}\}$ ,  $\bar{R}_i = P^{-1} R_i P^{-1}$ , ( $i=1,2$ ), 在矩阵中出现了非线性项  $-t_{1m}^{-1} L \bar{R}_1^{-1} L$  和  $-t_{2m}^{-1} L \bar{R}_2^{-1} L$ , 因而已无法利用凸优化算法求解。而由于  $(\bar{R}_1 - L) \bar{R}_1^{-1} (\bar{R}_1 - L) \geq 0$ ,  $(\bar{R}_2 - L) \bar{R}_2^{-1} (\bar{R}_2 - L) \geq 0$ , 可得  $-L \bar{R}_1^{-1} L \leq (\bar{R}_1 - 2L)$  和  $-L \bar{R}_2^{-1} L \leq (\bar{R}_2 - 2L)$ , 因此式(24)中的非线性项  $-t_{1m}^{-1} L \bar{R}_1^{-1} L$  和  $-t_{2m}^{-1} L \bar{R}_2^{-1} L$  可由  $t_{1m}^{-1} (\bar{R}_1 - 2L)$  和  $t_{2m}^{-1} (\bar{R}_2 - 2L)$  代替。同时, 在式(24)中, 分块矩阵  $\bar{A}$ ,  $B_1$  和  $B_2$  中存在未知的子块, 必须把未知矩阵从分块矩阵中提取出来才能使得 LMI 可解, 采用下述步骤处理。

根据引理 1, 对矩阵增加一个等式约束

$$L \mathcal{C} = \mathcal{C} B \quad (31)$$

式中,  $\mathcal{B} = V_1 (\mathcal{C}^T \mathcal{C})$ , 可以验证式(31)满足引理 1 的所有条件, 满足式(31)的所有可能解的形式为

$$L = \mathcal{C} V_1 \mathcal{C}^T + \mathcal{C}_\perp \bar{L} \mathcal{C}_\perp^T \quad (32)$$

式中,  $\mathcal{C}_\perp = \begin{bmatrix} C_\perp^T & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ ,  $\bar{L}$  为具有适当维数的

正定矩阵, 假设  $\bar{L}$  具有如下形式的解:

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} I_{n-q} & \\ & 0 \end{bmatrix} V_2 \begin{bmatrix} I_{n-q} \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} C \\ I_n \end{bmatrix} V_3 \begin{bmatrix} C \\ I_n \end{bmatrix}^T \quad (33)$$

则  $L$  解的形式如式(29)所示, 并且

$$\begin{cases} L \bar{A}^T = L \bar{A} + L H_1 \bar{A}_f^T H_1^T \\ L B_1^T = L H_1 \mathcal{C}_f^T \mathcal{B}^T \\ L B_2^T = L \mathcal{C} \bar{B}_f^T H_1^T \end{cases} \quad (34)$$

根据式(29)、式(31)、式(34)以及分块矩阵的运算规则, 可得

$$\begin{cases} L \bar{A}^T = L \bar{A} + \mathcal{C}_\perp N V_3 A_f^T H_1^T \\ L B_1^T = \mathcal{C}_\perp N V_3 C_f^T \mathcal{B}^T \\ L B_2^T = \mathcal{C} \bar{B}_f^T H_1^T \end{cases} \quad (35)$$

然后, 可以令  $V_3 A_f^T = \bar{A}_f^T$ ,  $V_3 C_f^T = \bar{C}_f^T$ ,  $\mathcal{C} \bar{B}_f^T = \bar{B}_f^T$  得到式(30)。

根据上述推导证明可以看出, 定理 1 的式(7)~式(11)和定理 2 的式(24)~式(28)等价。如果系统使得式(24)~式(28)成立, 系统就是全局渐近稳定的, 其控制器参数由式(30)求得。将式(25)~式(29)代入式(24), 得到了一个可以求解的 LMI, 利用 LMI 工

具箱即可求得所需解。

注 3 在定理 2 的证明过程中, 对于非线性项  $-t_{1m}^{-1} L \bar{R}_1^{-1} L$  和  $-t_{2m}^{-1} L \bar{R}_2^{-1} L$  的处理, 通过对不等式  $(\bar{R}_1 - L) \bar{R}_1^{-1} (\bar{R}_1 - L) \geq 0$ ,  $(\bar{R}_2 - L) \bar{R}_2^{-1} (\bar{R}_2 - L) \geq 0$  的巧妙应用, 解决了利用凸优化算法无法求解的问题。对于分块矩阵中的未知矩阵问题, 通过对矩阵增加一个等式约束, 成功转化为线性矩阵不等式的可解性问题。

#### 4 仿真实例

例 1 为说明上述结论的有效性, 考虑具有如下参数的 Lurie 系统(1)

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 0.5 \\ -1 & -1.5 \end{bmatrix} c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix} f(t) \\ z(t) = [1 \quad -1.5] c(t) \\ f(t) = -f(t, z(t)) \end{cases}$$

采用式(3)所示的动态输出反馈控制器构成图 1 所示的网络控制系统, 利用本文定理得到的最大允许时延上界  $t_{\max} = t_{1m} + t_{2m} = 1.0$ , 而文献[13]得到的最大允许时延上界为 0.8, 可见本文所得结论具有更低的保守性。

当  $t_{1m} = t_{2m} = 0.1s$ , 利用 MATLAB 中的 LMI 工具箱求解式(24)~式(28), 得到:

$$\begin{aligned} V_1 &= 1.9212, \\ V_3 &= \begin{bmatrix} 0.9791 & 0 \\ 0 & 2.4041 \end{bmatrix} \\ A_f &= \begin{bmatrix} -2.5293 & 0 \\ 0 & -5.3185 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{B}_f = [-0.2132 \quad 0]^T, \bar{C}_f = [-10.0421 \quad 0]$$

因此, 由式(30)可以求出:

$$A_f = \begin{bmatrix} -2.5738 & 0 \\ 0 & -2.2119 \end{bmatrix}$$

$$B_f = [-0.0927 \quad 0]^T, C_f = [-10.2489 \quad 0]$$

下面进行仿真, 取非线性函数  $f(\cdot)$  为饱和函数, 网络诱导时滞在  $[0, 0.1]$  之间随机产生, 系统的初始状态为  $[2 \quad -3]^T$  时, 闭环状态响应如图 2 所示, 由此可以看出, 本文方法是有效的。

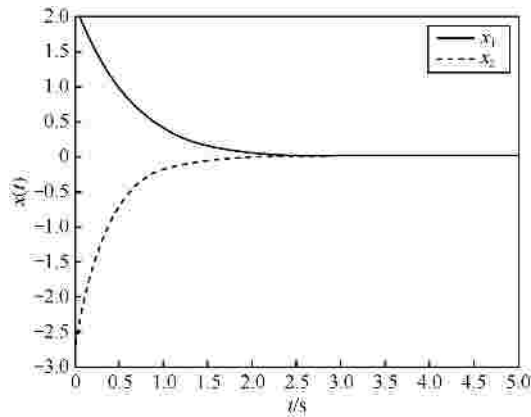


图 2 闭环 NCS 状态响应曲线

## 5 结束语

本文考虑在具有非理想网络状况的情形下,将 Lurie 网络控制系统建模为一个多时滞的 Lurie 系统模型,应用自由权矩阵方法,并保留 Lyapunov-Krasovskii 泛函导数中被忽略的有用项,首先给出了一种具有更低保守性的 Lurie 网络控制系统稳定条件,在此基础上增加一个等式约束,将 NLMI 转化为 LMI 利用 MATLAB 中的 LMI 工具箱求解 LMI 得到动态输出反馈控制器的参数,数值实例表明此方法具有更低的保守性。

## 参考文献:

- [1] YAKUBOVICH V A, LEONOV G A, GELIG A K. Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities[M]. Singapore: World Scientific, 2004. 12-15.
- [2] ZENG H B, HE Y, WU M, *et al.* Complete delay-decomposing approach to asymptotic stability for neural networks with time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2011, 22(5): 806-812.
- [3] 王萍, 陈虹, 卢晓晖. 预测控制主动队列管理算法的设计与分析[J]. 通信学报, 2011, 32(9):68-76.  
WANG P, CHEN H, LU X H. Design and analysis of active queue management algorithm based on predictive control[J]. Journal on Communications, 2011, 32(9):68-76.
- [4] MOON Y S, PARK P, KWON W H, *et al.* Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems[J]. International Journal of Control, 2001, 74(14): 1447-1455.
- [5] XIAO S P, ZHANG X M. New globally asymptotic stability criteria for delayed cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 2009, 56(8):659-663.
- [6] HAO F, ZHAO X. Absolute stability of Lurie networked control systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control 2010, 20(12):1326-1337.
- [7] YUE D, HAN Q L, PENG C. State feedback controller design of networked control systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part II 2004, 51(11):640-644.
- [8] HE Y, WU M, LIU G P, *et al.* Output feedback stabilization for a discrete-time system with a time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(10): 2372-2377.
- [9] SHI Y, YU B. Output feedback stabilization of networked control systems with random delays modeled by Markov chains[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(7):1668-1674.
- [10] JIANG X, HAN Q L. New stability criteria for linear systems with interval time-varying delay[J]. Automatica 2008, 44(10): 2680-2685.
- [11] CLOOSTERMAN M, VAN DE WOUW N, HEEMELS M, *et al.* Stability of networked control systems with uncertain time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(7): 1575-1579.
- [12] HE Y, WANG Q G, LIN C, *et al.* Augmented Lyapunov functional and delay-dependent stability criteria for neutral systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2005, 15(8):923-933.
- [13] ZENG H B, HE Y, WU M, *et al.* Absolute stability and stabilization for Lurie networked control systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(14): 1667-1676.
- [14] 江兵, 张崇巍. Lurie 网络化控制系统动态输出反馈控制器设计[J]. 应用科学学报. 2010, 28(2):189-196.  
JIANG B, ZHANG C W. Design of dynamic output feedback controller for lurie networked control systems[J]. Journal of Applied Sciences, 2010, 28(2): 189-196.
- [15] PENG C, TIAN Y C, TADE M O. State feedback controller design of networked control systems with interval time-varying delay and nonlinearity[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control 2008, 18(12):1285-1301.
- [16] HUANG C H, IOANNOU P A, MAROULAS J, *et al.* Design of strictly positive real systems using constant output feedback[J]. IEEE Transactions on Automatic control, 1999, 44(3):569-573.
- [17] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, *et al.* Linear Matrix Inequality in System and Control Theory[M]. SIAM Studies in Applied mathematics. Philadelphia: SIAM, 1994. 23-29.

## 作者简介:



陈刚 (1977-), 男, 湖南新化人, 中南大学博士生, 湖南工业大学讲师, 主要研究方向为网络控制系统, 时滞系统稳健控制。

(通信作者) 朱红求 (1970-), 男, 湖南双峰人, 中南大学讲师, 主要研究方向为复杂工业过程建模与优化控制。E-mail: hqcsu@lus.edu.cn。

阳春华 (1965-), 女, 湖南双峰人, 中南大学教授、博士生导师, 主要研究方向为复杂工业过程建模与优化控制、智能自动化控制系统与装置、智能信息处理技术。

胡春华 (1973-), 男, 湖南新化人, 博士, 湖南商学院教授, 主要研究方向为云计算、可信计算。